FGV Management

Gestão Empresarial

Matemática Financeira

Prof. Carlos Alexandre Sá

carlosalex@openlink.com.br

Realização Fundação
Getulio Vargas
FGV Management

Sumário

1. Programa da disciplina

1.1 Ementa

Juros Simples. Conceito de juros simples. Desconto de Títulos e Duplicatas. Valor de face e valor de mercado. Juros compostos. Conceito de juros compostos. Valor do dinheiro no tempo. Valor presente e valor futuro. Valor presente líquido e taxa interna de retorno. Taxa de desconto. Valor e custo. Problemas da TIR. Equivalência de taxas de juros. Períodos de capitalização. Taxas anuais, mensais e diárias. Equivalência de fluxas de caixa. Perpetuidades e anuidades. Sistemas de amortização. Tabela price e SAC.

1.2 Carga horária total

24 horas aula

1.3 Objetivos

Expor os fundamentos da matemática financeira. Estudar as principais características dos sistemas de juros simples e dos juros compostos e suas principais aplicações práticas. Focar as aplicações do sistema de juros compostos nos fluxos de caixa e dos fluxos de caixa nos sistemas de amortização. Introduzir o aluno na utilização da calculadora financeira HP-12C. Dar ao aluno base para cursos mais avançados.

1.4 Conteúdo programático

Principais Conceitos
Juros Simples
- *Fórmulas Genéricas*
- *Taxas Proporcionais*
- *Fórmulas Derivadas*
- *Desconto de Títulos e Duplicatas*

Juros Compostos
- *Fórmulas Genéricas*
- *Taxas Equivalentes*
- *Fórmulas Derivadas*

Juros Simples vs. Juros Compostos

Fluxo de Caixa

Valor Atual de um Fluxo de Caixa

A Taxa Interna de Retorno

Séries Uniformes

Equivalência de Fluxos de Caixa

Sistemas de Amortização

O Sistema Price

SAC – Sistema de Amortizações Constantes

1.5 Metodologia

Após um capítulo introdutório onde são expostos os principais conceitos que serão desenvolvidos ao longo do curso, o programa se divide em quatro tópicos que se interligam em ordem crescente de complexidade, cada um servindo de base ao que será exposto no capítulo seguinte.

Sempre que possível, é exposto como os problemas concernentes ao assunto abordado é resolvido analiticamente e como a calculadora pode ser utilizada para resolver o mesmo problema. Quando a solução analítica é muito complexa e envolve problemas complicados de potenciação, logaritmos ou interpolações, o aluno é poupado e o programa expõe apenas a solução por meio da calculadora.

Ao longo da exposição, são resolvidos exemplos para fixar os conceitos expostos. Ao final de cada capítulo são enunciados alguns exercícios cujas soluções encontram-se no final da apostila.

1.6 Critérios de avaliação

Ao final do curso, os alunos serão avaliados por meio de prova individual, sem consulta. Nesta prova, algumas questões podem exigir a solução analítica; em outras, será permitido o uso da calculadora. Somente serão abordados assuntos contidos na apostila.

1.7 Bibliografia recomendada

PUCCINI, Abelardo – Matemática Financeira - Editora Saraiva

Curriculum resumido do professor

Carlos Alexandre Sá, Formado em Engenharia Civil pela PUC-RJ, Curso de Administração de Empresas pela UFERJ, Curso de administração industrial pela Universidade da Holanda, Diretor Superintendente da Metalfab Industria e Comercio, Diretor Superintendente da Refinaria de Sal Ita (Grupo Noralage), Diretor Financeiro da STL-Sistemas de Transportes Ltda. (Grupo Bozano Simonsen), Diretor Financeiro da Hiborn do Brasil (produtos Lillo), Diretor Financeiro da Montana Participações Ltda. (subsidiária da Western Energy Co.),

Professor do Instituto Brasileiro de Executivos Financeiros, Professor do IBMEC - Instituto Brasileiro de Empresas do Mercado de Capitais, Sócio da ***Cash Flow Solutions Consultoria***., Professor convidado da Fundação Getúlio Vargas.

2. Principais Conceitos

Suponhamos que duas empresas, a empresa “A” e a empresa “B”, tenham a receber R$ 100 cada. A empresa “A” deve receber seus R$ 100 em 30 dias e a empresa “B”, em 360 dias. Será que os R$ 100 da empresa “A” valem o mesmo que os R$ 100 da empresa “B”? Claro que não! Os R$ 100 da empresa “A” valem mais do que os R$ 100 da empresa “B”. Isto porque o valor do dinheiro varia no tempo. É o chamado “valor temporal” do dinheiro. A matemática financeira é a ciência que estuda o valor do dinheiro no tempo.

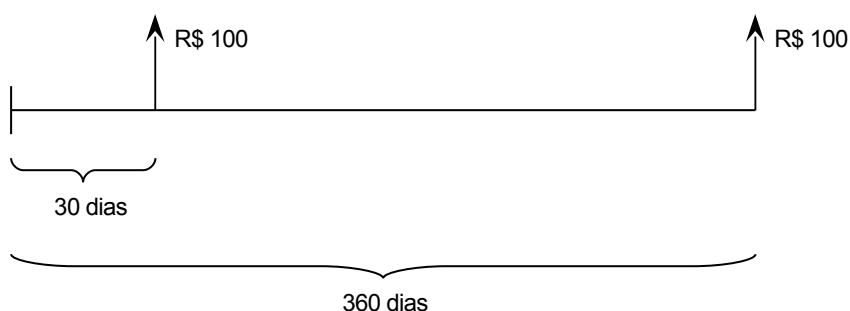



Figura 1 - O valor temporal do dinheiro

Em matemática financeira, os seguintes termos possuem os seguintes significados:

Principal, Capital Inicial ou Valor Presente

Chamamos de principal, capital inicial ou valor presente à quantia tomada emprestada ou investida e sobre a qual incidirão juros.

Juros

Chamamos de juros à remuneração recebida por quem aplicou ou paga por quem tomou dinheiro emprestado. Os juros são, portanto, sempre expressos em unidades monetárias. Se, por exemplo, uma pessoa aplicou R$ 100 em um papel de renda fixa e, ao final de um certo tempo, resgatou este investimento por R$ 110, os juros recebidos foram R$ 10.

Montante, Valor de Resgate ou Valor Futuro

Chamamos de montante à soma do principal mais juros. No exemplo acima, o montante recebido pelo aplicador foi R$ 110, ou seja, a soma do principal de R$ 100 com os juros de R$ 10.

Taxa de Juros

Chamamos de taxa de juros à relação entre os juros recebidos ou pagos em um determinado período de tempo e o principal q eu deu origem a estes juros. Assim, se um investidor aplicou R$ 100 em uma aplicação de renda fixa e recebeu juros de R$ 10 ao final de um ano, a taxa de juros deste investimento foi 10% ao ano. Vê-se assim que a taxa de juros está sempre relacionada a um período, seja ele o dia, o mês, o ano, etc. A taxa de juros pode ser expressa em notação percentual (10% ao ano, por exemplo) ou em notação decimal (0,10 ao ano, por exemplo). Estas duas expressões são, evidentemente, equivalentes já que $10 \div 100 = 0{,}10$.

Os juros podem ser capitalizados no regime de juros simples, no regime de juros contínuos ou no regime de juros compostos. No Brasil, apenas os regimes de juros simples e de juros compostos são usados.

Juros Simples

No regime de juros simples, os juros incidem exclusivamente sobre o principal.

Juros Compostos

No regime de juros compostos, ao final de cada período de capitalização, os juros se incorporam ao principal e passam a render juros também.

Período de Capitalização

Chamamos de período de capitalização ao tempo que, uma vez decorrido, faz com que os juros sejam devidos ou incorporados ao principal e passem, por sua vez, a render juros também. A taxa de juros é sempre relacionada a um determinado período de capitalização. Assim, quando uma taxa é anual (10% a.a., por exemplo), o período de capitalização é o ano; quando a taxa é mensal (1% a.m., por exemplo), o período de capitalização é o mês, e assim por diante. Quando o período a que se refere a taxa de juros é diferente do período de capitalização, isto deve ser mencionado, tal como na expressão "taxa de 10% ao ano, capitalizados mensalmente", e assim por diante.

Taxa Efetiva

Chamamos de taxa efetiva àquela cujo período de capitalização é igual à unidade de tempo na qual está expresso o período da operação. São exemplos de taxas efetivas 12% ao ano capitalizados anualmente, 3% ao mês capitalizados mensalmente, e assim por diante.

Taxa Nominal

Chamamos de taxa nominal àquela expressa em uma unidade de tempo diferente da unidade de tempo dos períodos de capitalização. As taxas nominais são geralmente fornecidas em termos anuais. São exemplos de taxas efetivas 12% ao ano capitalizados mensalmente, 2% ao mês capitalizados diariamente, e assim por diante.

Taxas Proporcionais

Duas ou mais taxas de juros são ditas proporcionais quando ao serem aplicadas a um mesmo principal durante um mesmo prazo de tempo no regime de juros simples, produzem um mesmo montante. Vê-se, portanto, que o conceito de taxas proporcionais está estreitamente ligado ao regime de juros simples. São exemplos de taxas proporcionais: 1% ao mês e 12% ao ano.

Taxas Equivalentes

Duas ou mais taxas de juros são ditas equivalentes quando ao serem aplicadas a um mesmo principal durante um mesmo prazo de tempo no regime de juros compostos, produzem um mesmo montante. Vê-se, portanto, que o conceito de taxas equivalentes está estreitamente ligado ao regime de juros compostos. São exemplos de taxas equivalentes: 1% ao mês e 12% ao ano.

Exercícios

1. Qual é a diferença entre “principal” e “montante” ?
2. Qual é a diferença entre “juros” e “taxa de juros” ?
3. Qual é a diferença entre “taxa efetiva” e “taxa nominal” ?
4. Qual é a diferença entre “regime de juros simples” e “regime de juros compostos” ?
5. Qual é a diferença entre “período de capitalização” e “prazo da operação”?
6. Qual é a diferença entre “taxa proporcional” e “taxa equivalente” ?

3. Juros Simples

3.1 Fórmulas Genéricas

A expressão mais elementar de toda a matemática financeira; aquela que deu origem a todas as outras expressões, é a fórmula dos juros simples. Como foi dito no capítulo anterior, no regime de juros simples, os juros incidem exclusivamente sobre o principal. A formula dos juros simples é:

$$J = P \times i \times n$$

Onde:

J = juros

P = principal

i = taxa de juros expressa na mesma unidade de tempo do período

n = período

Como corolário desta expressão, temos a fórmula do "montante". Como o "montante" é a soma do principal com os juros, temos que:

$$M = P + P \times i \times n$$

Colocando "P" em evidência, temos:

$$M = P \times [1 + (i \times n)]$$

Exemplos

1. *Quanto renderia de juros R$ 100 aplicados durante 12 meses, a 1% ao mês no regime de juros simples?*

Resposta:

J = ?

P = R$ 100

i = 1% ou 0,01 ao mês

n = 12

J = P x i x n = 100 x 0,01 x 12 = R$ 12

2. *Quanto receberia um investidor que houvesse aplicado R$ 200 durante 2 anos, a 20% ao ano no regime de juros simples?*

Resposta:

M = ?

P = R$ 200

i = 20% ou 0,20 ao ano

n = 2 anos

$M = P \times [1 + (i \times n)] = 200 \times [1 + (0{,}2 \times 2)] = R\$\ 280$

3.2 Taxas Proporcionais

Não apenas as fórmulas acima, mas todas as fórmulas em matemática financeira pressupõem taxas efetivas de juros, ou seja, taxas expressas em uma unidade de tempo igual ao período de capitalização. Assim, se o período de capitalização for o mês, a taxa deverá ser expressa em X% ao mês, se a capitalização for trimestral, a taxa deverá ser expressa em X% ao trimestre, e assim por diante. Acontece que não é isto que ocorre na prática. Na prática, freqüentemente, a taxa de juros é expressa em uma unidade de tempo (geralmente o mês ou o ano) e o período "n", em outro. Assim temos que converter a taxa nominal dada, em uma taxa proporcional, ou seja, uma taxa de juros referida à unidade de tempo do período "n" , mas que produza o mesmo efeito da taxa efetiva dada.

Exemplo

Qual seria o montante devido por uma empresa que houvesse tomado emprestado R$ 100.000 por dois meses, para liquidação de principal e juros no final da operação, a uma taxa de juros de 24% ao ano no regime de juros simples?

Resposta

Vê-se no enunciado acima que o período "n" é dois meses e a taxa de juros está referida ao ano. Então, antes de aplicarmos a fórmula do montante, temos que calcular a taxa de juros para dois meses que seja proporcional a 24% ao ano. Isto é feito pela fórmula:

$$i_p = \frac{24 \times 2}{100 \times 12} = 0{,}04 \text{ ou } 4\% \text{ por bimestre}$$

É esta a taxa de juros que vai entrar na fórmula do montante. Assim temos que:

M = ?

P = R$ 100.000

i = 0,04 por bimestre

n = 1 bimestre

Donde:

$$M = P \times [1 + (n \times i)] = 100.000 \times [1 + (1 \times 0{,}04)] = R\$\ 104.000$$

Na prática, as taxas nominais de juros são, quase sempre, referidas ao mês ou ao ano, e o período “n”, em dias. Nestes casos, para calcular os juros no regime de juros simples, usamos as fórmulas abaixo que já convertem as taxas efetivas em taxas proporcionais:

$J = \frac{P \; x \; i \; x \; n}{3.000}$ (no caso de taxas mensais expressas na notação percentual) ou

$J = \frac{P \; x \; i \; x \; n}{36.000}$ (no caso de taxas anuais expressas na notação percentual)

3.3 Fórmulas Derivadas

A partir da fórmula dos juros simples, podemos deduzir as seguintes fórmulas derivadas:

Principal

O principal pode ser expresso por duas fórmulas

$$P = \frac{J}{i \; x \; n} \quad \text{ou} \quad P = \frac{M}{1 + (i \; x \; n)}$$

Taxa de Juros

A taxa de juros pode ser expressa por duas fórmulas

$$i = \frac{J \; x \; n}{P} \quad \text{ou} \quad i = \frac{M - P}{P \; x \; n}$$

Período

O período de aplicação pode ser expresso por duas fórmulas

$$n = \frac{J}{P \; x \; i} \quad \text{ou} \quad n = \frac{M - P}{P \; x \; i}$$

3.4 Desconto de Títulos e Duplicatas

Atualmente no Brasil o regime de juros simples é utilizado principalmente em três situações:

- Desconto de títulos e duplicatas,
- Operações em moeda estrangeira
- Juros de mora.

O desconto é uma modalidade de empréstimo de curto prazo para capital de giro, concedido através de adiantamento, mediante a cobrança de uma taxa de desconto, feito sobre títulos ou notas promissórias de crédito com recebimento futuro. Os juros são cobrados antecipadamente, na data de liberação dos recursos, com base na taxa de juros (também chamada de taxa de desconto) e no prazo a decorrer de cada título.

No caso da Duplicata, o emitente do título, ao negocia-lo é obrigado a endossá-lo transferindo para a instituição financeira seus direitos creditícios. Apesar desta transferência de direitos creditícios, a empresa emitente continua responsável pela liquidez do título negociado de tal forma que não pagando o sacado, a instituição financeira poderá debitar seu valor na conta corrente do emitente.

O valor que consta no título, e pelo qual ele será liquidado na data de seu vencimento, é chamado de valor de face do título. Já o valor pelo qual o título foi negociado é denominado valor de mercado. Vê-se, portanto, que o valor de mercado é igual ao valor de face menos os juros calculados com base na taxa de desconto.

Exemplos:

1. *No dia 7/3/00 uma empresa descontou uma duplicata de R$ 5.000,00 de valor de face, com vencimento para o dia 03/04/00, a uma taxa de desconto de 3% ao mês. Calcular o valor líquido recebido pela empresa, sem levar em consideração o desconto referente ao IOF[1].*

Resposta:

$$Juros = \frac{Valor\ do\ Título\ x\ Taxa\ de\ Desconto\ x\ N^o\ de\ dias}{3.000} = \frac{5.000\ x\ 3\ x\ 27}{3.000} = 135{,}00$$

Donde:

Líquido Recebido = R$ 5.000 – R$ 135 = R$ 4.865

2. *No dia 09/10/00, uma empresa descontou com o Banco Beta uma Nota Promissória de R$ 50.000, com vencimento em 16/10/00, a uma taxa de desconto de 2% a.m. Qual foi o juro pago pela empresa e qual o líquido recebido, sem levar em consideração o IOF?*

Resposta:

P = 50.000

i = 3% ou 0.03 ao mês

T = 7 dias

$$\text{Juros} = \frac{\text{Valor do Título x Taxa de Desconto x N}^o\text{ de dias}}{3.000} = \frac{50.000 \times 3 \times 7}{3.000} = 350$$

Líquido Recebido = R$ 50.000 – R$ 350 = R$ 49.650

3. *Uma empresa comprou com um de seus fornecedores matérias primas no valor de R$ 25.000. O contrato de fornecimento previa juros de mora de 2% ao mês em caso de atraso de pagamento. Qual a taxa de permanência diária (ou seja, quais os juros diários) prevista no contrato?*

[1] Toda operação de crédito feita com uma instituição financeira, com exceção das operações em moeda estrangeira, está sujeita ao desconto na fonte, referente ao IOF, à uma alíquota de 0,0041% ao dia, incidente sobre o principal da operação.

Resposta:

P = 25.000

i = 2% ou 0,02 ao mês

t = 1 dia

$$Taxa\ de\ Permanência = \frac{P \times i \times t}{3.000} = \frac{25.000 \times 2 \times 1}{3.000} = R\$\ 16.67$$

Veja bem que a taxa de desconto é diferente da taxa efetiva. Suponhamos que um título com valor de face de R$ 100 e vencimento para 30 dias fosse negociado a uma taxa de desconto de 4% a.m. O valor recebido seria, portanto, R$ 96. A taxa efetiva mês desta operação seria [(100 ÷96) – 1] x 100 = 4,17% a.m., portanto ligeiramente superior à taxa de desconto Isto porque, nas operações de desconto, os juros são cobrados antecipadamente (ou "na cabeça" como se diz no jargão de mercado) e não no final do período de capitalização (veja exercício n.º 6).

3.5 Usando a Calculadora Financeira

3.5.1 Solucionando Problemas de Juros Simples

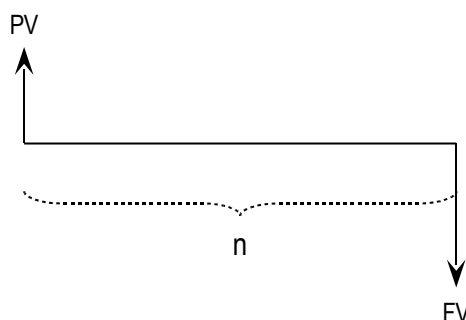
Na calculadora HP12C, as seguintes teclas possuem os seguintes significados:

n = período

i = taxa de juros

PV = "principal" , "capital inicial" ou "valor presente"

FV = "montante", "valor de resgate" ou "valor futuro"[2]

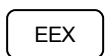
Além disto, é importante saber que a calculadora HP12C trata os problemas financeiros como um fluxo de caixa. Assim, se o valor presente é uma saída (como no caso de uma aplicação), o valor futuro é uma entrada (representada pelo resgate da aplicação) e se o valor presente é uma entrada (como no caso de um empréstimo), o valor futuro é uma saída (representada pelo pagamento do empréstimo). O gráfico abaixo ilustra o problema:

[2] As notações PV e FV vêm do inglês "Present Value" e "Future Value".

Esta explicação é importante para entender porque, na HP12C, quando o PV é positivo o FV é negativo, e vice-versa.

Quando o visor da calculadora HP12C exibe um "c", isto significa que ela está no modo de juros compostos; quando o "c" não é exibido, a calculadora está no modo de juros simples. Para alternar entre o modo de juros simples e juros compostos, pressione sucessivamente as teclas "STO" e "EEX". No entanto, é importante notar, que, no modo de juros simples, a calculadora pressupõe sempre períodos singulares, ou seja, menores ou iguais a "1". Assim, para calcularmos a taxa mensal, por exemplo, primeiro calculamos a taxa anual e depois dividimos por "12"; para calcularmos a taxa diária, primeiro calculamos a taxa mensal e depois dividimos por "30", e assim por diante.

Para resolver, com o auxílio da calculadora financeira, problemas envolvendo juros (simples ou compostos), entra-se com três dados e pressiona-se a tecla do dado procurado; a resposta será exibida no visor.

3.5.2 Calculando o n.º de dias entre duas datas

Na prática, ao se resolver um problema de matemática financeira, geralmente, a primeira coisa que se calcula é o período "n" expresso em dias. Para achar, com o auxílio de uma calculadora financeira, o número de dias entre duas datas, a primeira providência é certificar-se de que a calculadora está ajustada para trabalhar com datas na notação que usamos no Brasil, ou seja, dd/mm/aa. Na calculadora HP12C, isto é feito pressionando, em seqüência, as teclas "g" e "4", de forma a ativar a função "D.MY" (do inglês day/month/year). O visor de cristal líquido exibirá então, na parte inferior, "D.MY".

Em seguida entra-se com a data mais antiga na forma "dd.mmaaaa". Veja bem que, entre o dia e o mês, existe uma vírgula. Já entre o mês e o ano, não existe qualquer elemento separador. Após entrar com a primeira data, pressione "Enter". Entre então com a data mais recente e pressione, em seqüência as teclas "g" e "EEX". A função "ΔDYS" será, então, ativada e o número de dias entre as duas datas, exibido no visor.

Exemplo

Calcule o número de dias que existe entre os dias 1/1/2.000 e 15/10/2.000

Solução

Pressione as teclas da calculadora HP12C na seguinte seqüência:

Digitando	***Mostra***	***Comentário***
1.012000 Enter	1.012000	
15.102000 g EEX	288	Este é o n.º de dias entre as duas datas

3.5.3 Solucionando Problemas de Juros Simples

Para resolver, com o auxílio da calculadora financeira, problemas envolvendo juros simples, certifique-se, antes de tudo, de que a máquina está no modo de juros simples. Depois entre com três dados e pressione a tecla do dado procurado; a resposta será exibida no visor.

Exemplo:

Qual a taxa de juros mensal que transforma, em um ano, um principal de R$ 100 em um montante de R$ 120?

Resposta

n = 12 meses

i = ?

PV = -R$ 100

FV = R$ 120

A seqüência de teclas a ser pressionadas é:

Digitando	Visor	Comentário
n	1,00	Período singular
CHS PV	-100,00	Principal
FV	120,00	Montante
i	20,00	Taxa de juros anual
g i	1,67	Taxa de juros mensal

Exercícios:

1. Qual o montante acumulado em 12 meses, a uma taxa de 0,02 ao mês, no regime de juros simples, a partir de um principal de R$ 10.000?
2. Qual o principal necessário para se ter um montante de R$ 10.000 em 24 meses a uma taxa de 4% ao trimestre?
3. Em quanto tempo um capital dobra a juros simples de 2% ao mês?
4. Um cliente adquiriu de uma empresa mercadorias no valor de R$ 2.500 para pagamento em 03/02/00. O contrato de fornecimento previa juros de mora de 3% ao

mês em caso de atraso de pagamentos. Quanto o cliente pagaria de encargos moratórios caso pagasse as mercadorias adquiridas em 21/02/00?

5. Quanto receberia em seis meses um aplicador que houvesse investido R$ 100.000 a 12% ao ano no regime de juros simples?
6. Qual a taxa efetiva mês, sem levar em consideração a incidência do IOF, de uma taxa de desconto de 4% ao mês?
7. Qual a taxa efetiva mês de uma taxa de desconto de 4% ao mês, levando em consideração a incidência do IOF de 0,0041% ao dia?
8. Quanto estaria cobrando de taxa mensal de juros de mora um fornecedor que propusesse uma taxa de permanência de R$ 2,50 por dia de atraso em uma compra de R$ 2.500?

4. Juros Compostos

4.1 Fórmulas Genéricas

Como já vimos no primeiro capítulo, no regime de juros compostos, ao final de cada período de capitalização, os juros se incorporam ao principal e passam a render juros também. Suponhamos que um principal "P" seja aplicado a uma taxa "i", no regime de juros compostos, ao longo de três períodos de capitalização. Ao final do 1º período, o montante recebido seria M = P x (1 + i), já que "n", ou seja, o número de períodos, seria "1".

No primeiro período a taxa de juros incidiu apenas sobre o principal "P". Já no segundo período, como os juros do primeiro período se incorporaram ao principal e passaram a render juros, o novo principal passou a ser P x (1 + i) e, conseqüentemente, o novo montante, [P x (1 + i)] + [P x (1+ i)] x i. Colocando a expressão P x (1 + i) em evidência, teremos P x (1 + i) x (1 + i), ou seja, $P \times (1 + i)^2$. Repetindo o mesmo raciocínio teremos que o montante no terceiro período seria $P \times (1 + i)^3$, e assim sucessivamente. Assim teríamos que:

1º Período	$M = P \times (1 + i)$
2º Período	$M = [P \times (1 + i)] + [P \times (1+ i)] \times i = P \times (1 + i)^2$
3º Período	$M = [P \times (1 + i)^2] + [P \times (1 + i)^2] \times i = P \times (1 + i)^3$
....	
nº Período	$M = P \times (1+i)^n$

Caso a taxa de juros estivesse expressa na notação percentual, a fórmula acima adquiriria a seguinte forma:

$$M = P \times \left[1 + \left(\frac{i}{100}\right)\right]^n$$

Exemplo

Quanto resgataria um investidor que tivesse aplicado R$ 100 por 12 meses a uma taxa de 1% a.m. a juros compostos?

Resposta.

M = ?

P = R$ 100

i = 0,01 a.m.

n = 12 meses

$$M = P \times (1 + I)^n = 100 \times (1+0{,}01)^{12} = R\$\ 112{,}68$$

Como corolário da fórmula do montante, temos que a fórmula para se achar o principal, uma vez conhecidos o montante, a taxa de juros e o período é:

$$P = \frac{M}{(1+i)^n}$$

Exemplo

Qual o principal seria necessário investir em uma aplicação que rendesse 2% a.m.a juros compostos, para que ao final de 6 meses se pudesse resgatar R$ 250?

Resposta

P = ?

M = R$ 250

i = 0,02 a.m.

n = 6 meses

$$P = \frac{M}{(1+i)^n} = \frac{250}{(1+0{,}02)^6} \cong R\$\ 222$$

4.2 Taxas Equivalentes

Também no regime de juros compostos as fórmulas pressupõem taxas efetivas de juros, ou seja, taxas expressas em uma unidade de tempo igual ao período de capitalização. Na prática, o que acontece quase sempre é a taxa de juros ser expressa em meses ou anos e o período "n", em dias. Assim temos que converter a taxa nominal dada, em uma taxa equivalente, ou seja, uma taxa de juros referida à unidade de tempo do período "n" , mas que produza o mesmo efeito da taxa efetiva dada.

Exemplo

Qual seria o montante devido por uma empresa que houvesse tomado emprestado R$ 100.000 por dois meses, para liquidação de principal e juros no final da operação, a uma taxa de juros de 24% ao ano no regime de juros compostos?

Resposta

Vê-se no enunciado acima que o período "n" é dois meses e a taxa de juros está referida ao ano. Então, para transformarmos a taxa nominal em uma taxa equivalente, temos que elevar a expressão (1+ i) por um período "n" que represente o resultado da divisão de dois meses por um ano (2 ÷12 = 0,1667), ou seja, o inverso do número de vezes que o período de dois meses está contido no período de um ano. Isto é feito pela fórmula:

$$M = P \times (1 + i)^n = 100.000 \times (1 + 0{,}24)^{0{,}1667} = R\$\ 103.650{,}23$$

Decompondo a expressão $(1 + 0,24)^{2/12}$*, observamos que esta expressão é a forma sintética da expressão* $[(1 + 0,24)^{1/12}]^{2}$*, ou seja, primeiro a expressão foi elevada a "1/12", e, em seguida, elevada a 2. Na prática, isto quer dizer que, primeiro encontramos a taxa equivalente mês da taxa nominal de 24% ao ano; em seguida encontramos a taxa equivalente bimestral.*

Como já dissemos, na prática, as taxas nominais de juros são, quase sempre, referidas ao mês ou ao ano, e o período "n", em dias. Nestes casos, para calcular as taxas equivalentes, usamos as fórmulas abaixo que já convertem as taxas efetivas em taxas equivalentes, e onde o período "n" é expresso em dias:

$[(1 + n)^{n/30} – 1]$ (no caso de taxas mensais expressas na notação decimal) ou

$[(1 + n)^{n/360} – 1]$ (no caso de taxas anuais expressas na notação decimal) ou

$[(1 + n)^{n/30} – 1] \times 100$ (no caso de taxas mensais expressas na notação percentual) ou

$[(1 + n)^{n/360} – 1] \times 100$ (no caso de taxas anuais expressas na notação percentual)

Exemplo

1. *Qual a taxa equivalente para 15 dias à taxa efetiva de 24% ao ano?*

Resposta

$[(1 + 0,24)^{15/360} – 1] = 0,009$ *ou*

$[(1 + 0,24)^{15/360} – 1] \times 100 = 0,9\ \%$

2. *Qual a taxa equivalente para 7 dias à taxa efetiva de 4% ao mês?*

Resposta

$[(1 + 0,04)^{7/30} – 1] = 0,0092$ *ou*

$[(1 + 0,04)^{7/30} – 1] \times 100 = 0,92\ \%$

4.3 Fórmulas Derivadas

A partir da fórmula dos juros compostos, podemos deduzir as seguintes fórmulas derivadas:

Principal

O principal pode ser expresso pela fórmula

$$P = \frac{M}{(1+i)^n}$$

Taxa de Juros

A taxa de juros pode ser expressa pela fórmula

$$i = \sqrt[n]{\frac{M}{P}} - 1$$

Período

O período de aplicação pode ser expresso pela fórmula

$$n = \frac{\log M - \log P}{\log(1+i)}$$

Como se pode ver, algumas fórmulas derivadas são de difícil aplicação por envolverem complexas operações de potenciação. Antigamente, estas fórmulas eram resolvidas com o auxílio de tabelas financeiras. Hoje, com o advento das calculadoras financeiras, estas tabelas ficaram completamente obsoletas e anacrônicas.

4.4 Usando a Calculadora Financeira

4.4.1 Solucionando Problemas de Juros Compostos

Para resolver, com o auxílio da calculadora financeira, problemas envolvendo juros (simples ou compostos), entra-se com três dados e pressiona-se a tecla do dado procurado; a resposta será exibida no visor.

Exemplo

Qual a taxa de juros mensal que transforma, em um ano, um principal de R$ 100 em um montante de R$ 120?

Resposta

n = 12 meses

i = ?

PV = -R$ 100

FV = R$ 120

A seqüência de teclas a ser pressionadas é:

Digitando	Visor	Comentário
n	1	Período
CHS PV	-100	Principal
FV	120	Montante
i	1,531	Taxa de juros procurada

A taxa procurada é 1,531% ao mês.

4.5 Juros Simples vs. Juros Compostos

No regime de juros simples, o montante evolui conforme uma progressão aritmética cuja razão seja "i". Sua evolução é, portanto, linear.

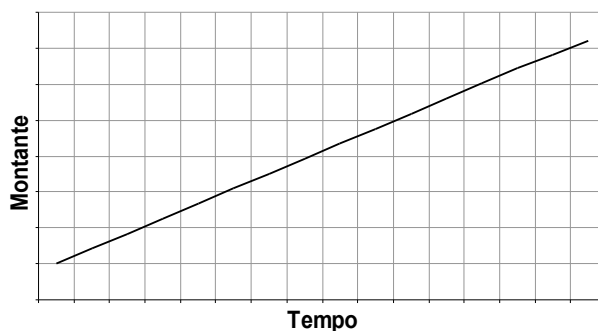



Figura 2 - Juros Simples

Já no regime de juros compostos, o montante evolui conforme uma progressão geométrica cuja razão seja "1 + i". Sua evolução é, portanto, exponencial.

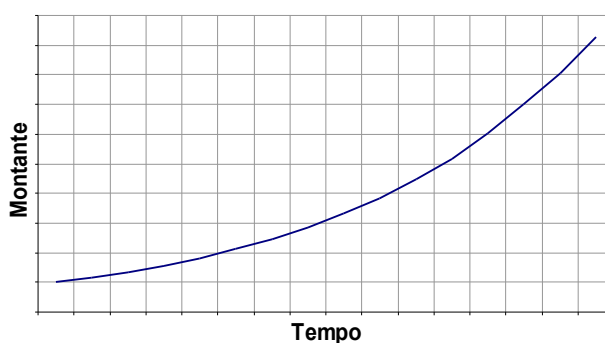



Figura 3 - Juros Compostos

A primeira vista fica a impressão que, se a taxa de juros e o prazo forem os mesmos, o montante produzido pelo regime de juros compostos é sempre maior do que o montante produzido pelo regime de juros simples. No entanto, nem sempre é isto o que acontece.

Exemplo

Dois investidores aplicaram R$ 100.000 cada, para resgatar em 6 meses. Ambos aplicaram a uma taxa de juros de 10% ao ano. O primeiro investidor aplicou no regime de juros simples; o segundo, no regime de juros compostos. Em sua opinião, qual das duas aplicações rendeu mais no período?

Resposta

1º investidor

$$M = P \times [1 + (i \times n)] = 100.000 \times [1 + (0,10 \times 0,5)] = R\$\ 105.000$$

2º investidor

$$M = P \times (1 + i)^n = 100.000 \times (1 + 0{,}10)^{0{,}5} \approx R\$\ 104.880$$

O abaixo ilustra o que aconteceu.

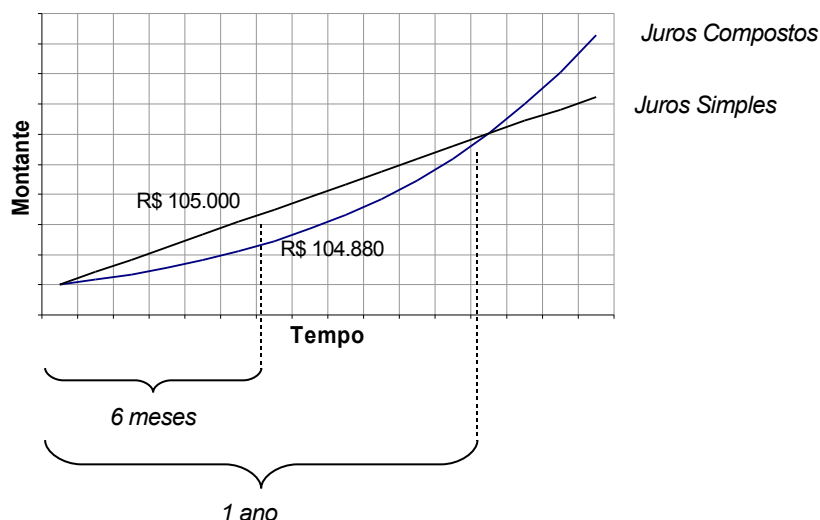



Figura 4 - Juros Simples vs. Juros Compostos

Se o prazo de resgate das duas aplicações fosse um ano, ambas teriam rendido o mesmo, ou seja, teriam rendido juros de R$ 10.000. Se o prazo de resgate fosse superior a um ano, o investidor que houvesse aplicado a juros compostos teria lucrado mais. Como o prazo de resgate foi inferior ao período de capitalização (um ano), o investidor que aplicou a juros simples ganhou mais.

Conclusão

Todas as vezes que o prazo de resgate for inferior ao período de capitalização, o regime de juros simples produz um montante superior ao montante produzido pelo regime de juros compostos.

Exercícios:

1. Qual o montante acumulado em 12 meses, a uma taxa de 2% ao mês, no regime de juros compostos, a partir de um principal de R$ 10.000?
2. Qual o principal necessário para se ter um montante de R$ 10.000 em 24 meses a uma taxa de 4% ao trimestre, capitalizados pelo sistema de juros compostos?
3. Em quanto tempo um capital dobra a juros compostos de 2% ao mês?
4. Quanto receberia em seis meses um aplicador que houvesse investido R$ 100.000 a 12% ao ano no regime de juros compostos?

5. Qual a taxa de juros mensal que transformaria um principal de R$ 10.000 em um montante de R$ 12.000 em 12 meses, no sistema de juros compostos?
6. Qual a taxa equivalente mês, no regime de juros compostos a 50% a.a.?

5. Fluxo de Caixa

Em matemática financeira, chamamos de fluxo de caixa a uma seqüência de entradas e saídas de dinheiro em diferentes momentos do tempo. Para melhor visualização dos problemas envolvendo fluxo de caixa, este é representado por um gráfico conforme a figura abaixo. Neste gráfico, o eixo horizontal representa a escala do tempo, as setas para cima, as entradas, e as setas para baixo, os desembolsos.

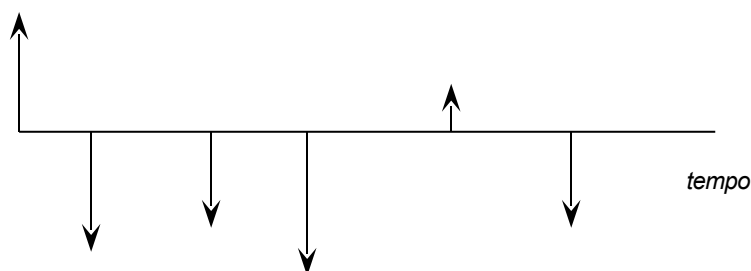



Figura 5 - Fluxo de Caixa

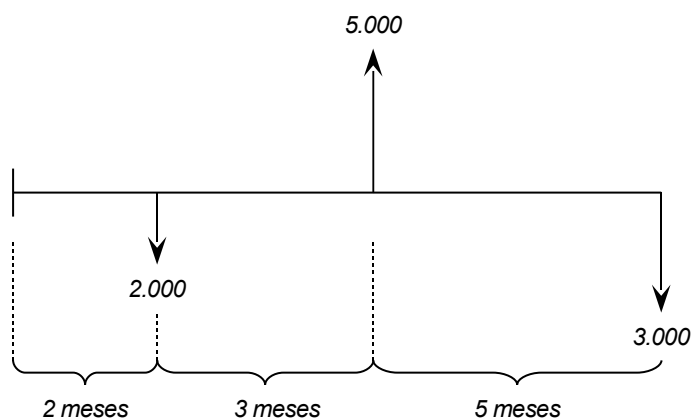
Em um fluxo de caixa, as entradas e saídas podem ser iguais ou não. Da mesma forma, os intervalos de tempo entre as entradas e as saídas podem ser regulares ou não. É importante notar que, nas fórmulas envolvendo fluxos de caixa, as entradas possuem, sempre, sinal positivo e as saídas, sinal negativo.

O estudo do fluxo de caixa é especialmente importante porque, baseados nestes fluxos é que são feitos os planos de amortização de pagamentos. Também usamos os fluxos de caixa para avaliar uma empresa, um projeto ou mesmo decidir entre várias opções de investimento, qual a mais interessante do ponto de vista financeiro.

5.1 Valor Atual de um Fluxo de Caixa

O valor atual de um fluxo de caixa é igual à soma algébrica dos valores atuais de suas entradas e saídas. A taxa de juros usada para trazer a valor presente estas entradas e estas saídas é chamada de taxa de desconto. Em um mesmo fluxo de caixa, a taxa de desconto é sempre a mesma para todas as parcelas, sejam elas entradas ou saídas.

Exemplo

Qual o valor atual do fluxo de caixa representado no gráfico abaixo, considerando uma taxa de desconto de 2% ao mês, capitalizados pelo regime de juros compostos?

Solução:

$$P_1 = \frac{M_1}{(1+i)^n} = \frac{-2.000}{(1+0,02)^2} = -1.922,34$$

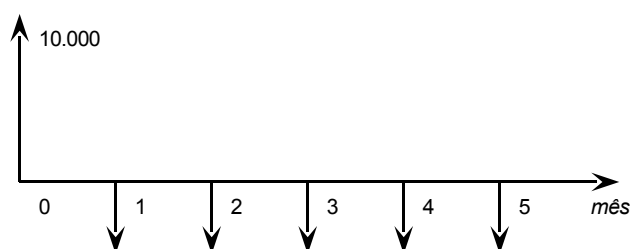
$$P_2 = \frac{M_2}{(1+i)^n} = \frac{5.000}{(1+0,02)^5} = 4.528,65$$

$$P_3 = \frac{M_3}{(1+i)^n} = \frac{-3.000}{(1+0,02)^{10}} = -2.461,04$$

Donde

$VP = P_1 + P_2 + P_3 = -1.922,34 + 4.528,65 - 2.461,04 = 145,27$

5.2 A Taxa Interna de Retorno

Imaginemos um fluxo de caixa conforme o mostrado na figura abaixo, no qual tanto o valor das prestações, quanto o intervalo das saídas, é constante.

Vamos calcular qual o valor presente deste fluxo de caixa para taxas de desconto de 3% a.m. e 7% a.m.

n	Prestação	3%	7%
0	10.000	10.000	10.000
1	(2.310)	(2.242,72)	(2.158,88)
2	(2.310)	(2.177,40)	(2.017,64)
3	(2.310)	(2.113,98)	(1.885,65)
4	(2.310)	(2.052,41)	(1.762,29)
5	(2.310)	(1.992,63)	(1.647,00)
Total	(1.550)	(579,14)	528,54

Observa-se que, neste caso, o valor presente do fluxo de caixa passou de um valor negativo (menos 579,14) para um valor positivo (mais 528,54) quando a taxa de desconto passou de 3% a.m. para 7% a.m. Isto quer dizer que, neste caso, a medida em que a taxa de desconto vai aumentando, o valor negativo do fluxo de caixa vai se reduzindo, vira "zero" e, a partir deste ponto, passa a ser positivo e passa a crescer com a taxa de desconto. O gráfico abaixo ilustra a evolução do valor presente do fluxo de caixa acima em função da variação da taxa de desconto.

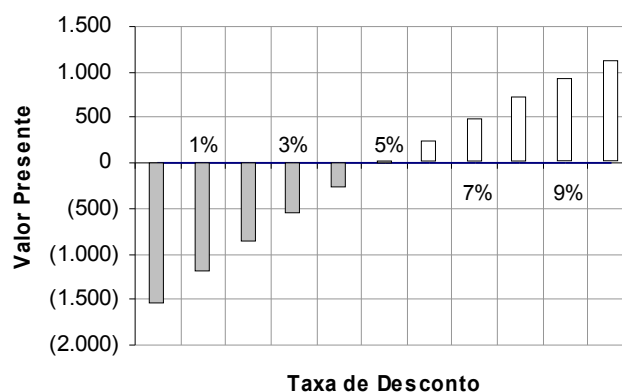



Figura 6 - Valor Presente vs. Taxa de Desconto

Verifica-se no gráfico acima, que neste caso, existe uma taxa de desconto, em torno de 5% a.m., que "zera" o valor presente do fluxo de caixa. A esta taxa de desconto que "zera" o valor presente do fluxo de caixa, chamamos de Taxa Interna de Retorno ou TIR.

5.3 Séries Uniformes

Chamamos de séries uniformes de pagamentos (ou de recebimentos) a um fluxo de caixa cujas saídas (ou entradas) possuam valores constantes e ocorram em intervalos regulares de tempo, conforme o gráfico abaixo:

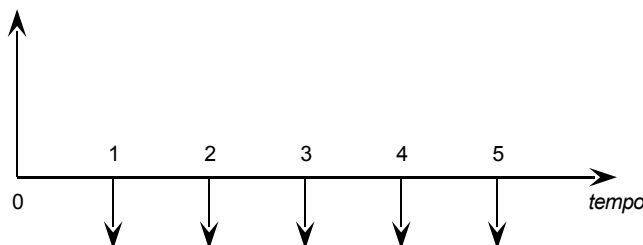
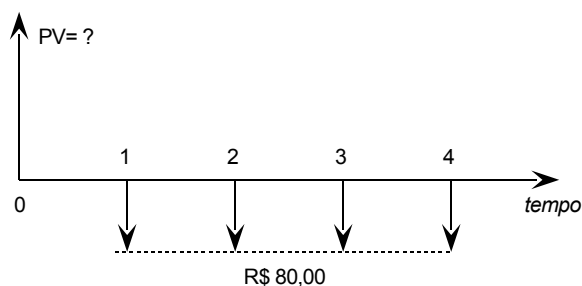



Figura 7 - Séries Uniformes

As séries uniformes são a forma mais simples de fluxo de caixa. Para resolver problemas envolvendo séries uniformes, utilizamos as mesmas teclas "n", "i", "PV" e "FV", usadas no cálculo de juros compostos, e mais a tecla "PMT" para dar entrada ou calcular o valor das saídas (ou entradas) periódicas.

Exemplo 1:

Qual o valor atual de uma série uniforme composta de 4 saídas anuais no valor de R$ 80, cuja taxa de desconto fosse 8%?

Solução

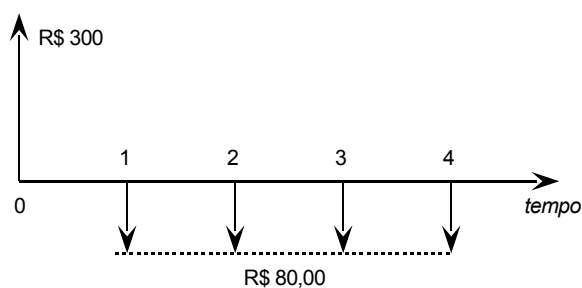
n = 4

i = 8% a.a.

PMT = 80,00

PV = ?

Exemplo 2:

Qual a taxa interna de retorno de uma série uniforme composta de 4 saídas anuais no valor de R$ 80, e cujo valor presente fosse R$ 300?

Solução

n = 4

i = ?

PMT = 80,00

PV = 300,00

5.4 Equivalência de Fluxos de Caixa

Dois ou mais fluxos de caixa são ditos equivalentes quando, se descontados a uma mesma taxa, produzem um mesmo valor presente.

Exemplo:

Calcular o valor presente dos fluxos de caixa abaixo, para uma taxa de desconto de 8% a.a.

Ano	Fluxo 1	Fluxo 2
0		
1	80,00	301,92
2	80,00	301,92
3	80,00	301,92
4	1.080,00	301,92
Total	1.240,00	1.207,6

Solução:

$$NPV_1 = \frac{80,00}{1,08} + \frac{80,00}{1,08^2} + \frac{80,00}{1,08^3} + \frac{1.080,00}{1,08^4} = 1.000,00$$

$$NPV_2 = \frac{301,92}{1,08} + \frac{301,92}{1,08^2} + \frac{301,92}{1,08^3} + \frac{301,92}{1,08^4} = 1.000,00$$

Como os valores presentes dos dois fluxos, quando descontados a uma taxa de 8% a.a., são iguais a R$ 1.000, estes fluxos são ditos “equivalentes”, a uma taxa de 8% a.a. É importante, no caso de fluxos equivalentes, especificar a taxa de desconto que os faz equivalentes. Isto porque dois ou mais fluxos só são equivalentes *a uma determinada taxa de desconto*! No exemplo acima, quando descontado a uma taxa de 0% a.a., o primeiro fluxo produz um valor presente de R$ R$ 1.240,00, enquanto que o segundo, R$ 1.207,68.

Uma propriedade importante dos fluxos equivalentes é que os montantes destes fluxos, em qualquer data, obtidos à mesma taxa que os faz equivalentes, são iguais.

Exemplo:

Obter o montante dos dois fluxos do exemplo acima, no final do 4° ano, a uma taxa de 8% a.a.

Solução:

$FV_1 = (80 \times 1{,}08^3) + (80 \times 1{,}08^2) + (80 \times 1{,}08) + 1.080 = 1.360{,}49$

$FV_2 = (301{,}92 \times 1{,}08^3) + (301{,}92 \times 1{,}08^2) + (301{,}92 \times 1{,}08) + 301{,}92 = 1.360{,}49$

5.5 Usando a Calculadora Financeira

Na calculadora HP12C, as seguintes teclas são usadas na solução de problemas relacionados ao fluxo de caixa:

Tecla	Descrição
PMT	Valor Presnte Descontado de um fluxo de caixa
IRR	Taxa Interna de Retorno
CF_0	Entrada ou Saída no momento “0”
CF_i	Entrada ou Saída no momento “j”.
Nj	N° de vezes que uma mesma entrada, ou saída, se repete de forma sucessiva

Para dar entrada na taxa de desconto, utiliza-se a própria tecla [i] .

Exemplo 1:

Qual é o valor presente descontado, a uma taxa de 8% a.a., do fluxo de caixa abaixo? Qual sua taxa interna de retorno?

Ano	Fluxo
0	(17.000,00)
1	(3.000,00)
2	6.000,00
3	7.000,00
4	8.000,00
5	(5.000,00)
6	15.000,00
Total	***10.000,00***

Solução:

Digitando	Visor	Comentário
CHS g CF_0	- 17.000,00	Fluxo inicial
CHS g CFj	- 3.000,00	Fluxos subseqüentes
g CFj	6.000,00	
g CFj	7.000,00	
g CFj	8.000,00	
CHS g CFj	- 5.000,00	
g CFj	15.000,00	
i		8,00 % a.a.
f NPV	2.852,95	Valor Presente
f IRR	11,90	11,90 % a.a.

Exemplo 2:

Qual é o valor presente descontado, a uma taxa de 8% a.a., do fluxo de caixa abaixo? Qual sua taxa interna de retorno?

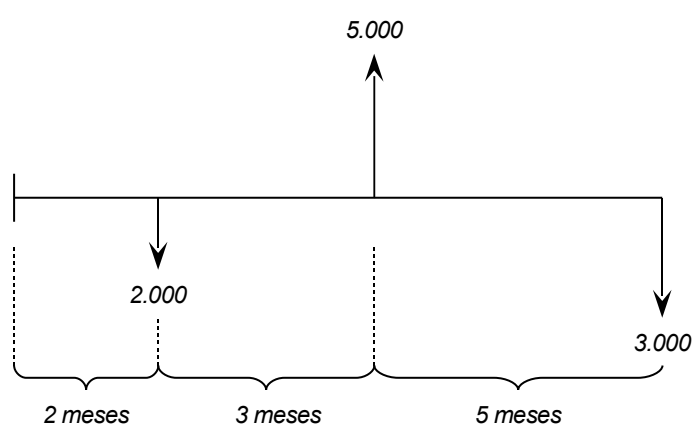
Ano	Fluxo
0	(17.000,00)
1	(3.000,00)
2	6.000,00
3	6.000,00
4	6.000,00
5	6.000,00
6	15.000,00

Total	10.000

Solução:

Digitando	Visor	Comentário
CHS g CF_0	- 17.000,00	Fluxo inicial
CHS g CFj	- 3.000,00	
g CFj	6.000,00	
g Nj	4,00	N° de fluxos iguais e consecutivos
g CFj	15.000,00	
i		8,00 % a.a.
f NPV	8.075,47	Valor Presente
f IRR	17,53	17,53 % a.a.

Exercícios

1. Qual a taxa interna de retorno do fluxo de caixa representado no gráfico abaixo ?

2. Qual o valor presente do fluxo de caixa abaixo descontado a uma taxa de 5% a.m.

n	Prestação
0	10.000
1	(2.310)
2	(2.310)
3	(2.310)
4	(2.310)
5	(2.310)
Total	(1.550)

3. Qual a taxa interna de retorno de uma série uniforme composta de 6 prestações iguais mensais e sucessivas de R$ 105, e R$ 500 de valor presente?
4. Uma empresa solicitou a um banco um empréstimo de R$ 50.000 para pagamento em 12 meses. O banco propôs o plano de amortização abaixo. Qual a taxa de juros embutida no plano de amortização proposto pelo banco?

n	Prestação
1	4.000

2	4.000
3	4.000
4	4.000
5	5.000
6	5.000
7	5.000
8	5.000
9	6.000
10	6.000
11	6.000
12	6.000

5. No dia 20/01/2.000 uma empresa fez um empréstimo de R$ 100.000. O plano de pagamento do empréstimo previa amortização de 50% do principal e juros no dia 21/02/2.000 e liquidação do saldo devedor e juros no dia 20/03/2.000. A taxa de juros cobrada pelo banco foi de 24% a.a. Qual o valor total das prestações pagas nas duas datas?
6. Quais seriam os valores das prestações do empréstimo acima se a empresa pagasse apenas juros no dia 20/02/2.000 e amortizasse integralmente o principal da operação no final do contrato?
7. Uma empresa tomou emprestado R$ 100.000. O plano de amortização previsto pelo banco previa uma comissão flat de 3% pagos "na cabeça" e 12 prestações iguais mensais e sucessivas no valor de R$ 9.455,96. O banco alega que a taxa do empréstimo é 2% ao mês. Você concordaria com isto?
8. Caso a empresa pudesse optar, o que sairia mais barato para ela em termos de taxa de juro, o esquema de pagamento proposto acima ou 12 pagamentos mensais, iguais e sucessivos de R$ 9.748,71, sem a comissão "flat"?

6. Sistemas de Amortização

Chamamos de amortização a qualquer pagamento feito para liquidar, total ou parcialmente, o principal de um empréstimo ou de um financiamento. Já uma prestação é a soma de uma amortização com os juros devidos sobre o saldo devedor. Depreende-se daí que, em matemática financeira, o conceito de amortização está ligado a) à idéia de empréstimo ou financiamento (ou seja, não se *liquida* um investimento; um investimento *resgata-se*) e b) à idéia de liquidação, ainda que parcial, do principal.

Os dois modelos sistemas de amortização mais usados, no Brasil são:

1. Sistema "Price", também conhecido como "Tabela Price";
2. SAC – Sistema de Amortizações Constantes.

6.1 O Sistema Price

O sistema "Price" é um sistema de amortização em que as prestações possuem valor constante e ocorrem em intervalos regulares de tempo. No sistema "Price", normalmente as taxas de juros são definidas em termos anuais e as prestações são mensais. Como as prestações possuem valor constante, e como estas prestações englobam "amortização" e "juros", concluímos que, a cada prestação, os juros decrescem (já que o saldo devedor se reduz a cada que a parcela de amortização cresce. A tabela abaixo, representando a amortização, pelo sistema "Price", de uma obrigação de R$ 10.000 em 5 parcelas, a juros de 26,44% a.a., ilustra o problema:

Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo
0				10.000,00
1	1.922,57	197,43	2.120,00	8.077,43
2	1.960,53	159,47	2.120,00	6.116,90
3	1.999,24	120,76	2.120,00	4.117,66
4	2.038,71	81,29	2.120,00	2.078,96
5	2.078,96	41,04	2.120,00	0,00

Observa-se que, na medida em que a dívida vai sendo amortizada (e que, portanto, o "saldo devedor" vai sendo reduzido), os juros vão decrescendo e a parcela da prestação referente à amortização vai crescendo de forma que o valor total da prestação não se altere.

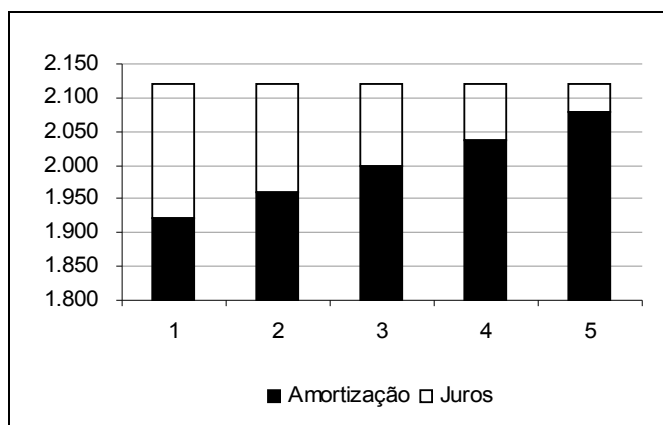



Figura 8 - Sistema de Amortização "Price"

Exemplo 1:

Quanto pagaria de prestação uma pessoa que comprasse um "lap-top" no valor de R$ 3.300, em quinze prestações mensais, iguais e sucessivas, a uma taxa de juros de 65 % ao ano?

Solução:

n = 15 meses

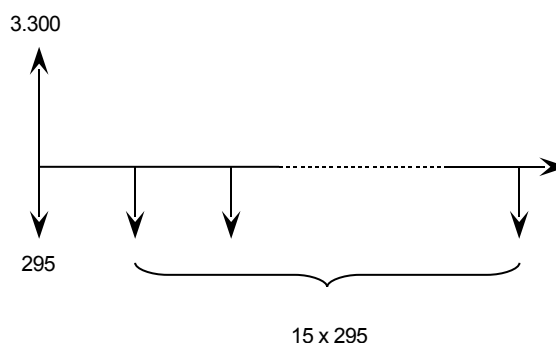
i = 65 % a.a.

PV = 3.300

PMT = ?

Exemplo 2:

Quanto estaria pagando de juros uma pessoa que comprasse um "lap-top" no valor de R$ 3.300, em quinze prestações mensais, iguais e sucessivas de R$ 295 mais um sinal de R$ 295?

Solução:

n = 15 meses

i = ?

PV = 3.300 – 295 = 3.005

PMT = 295

Digitando	Visor	Comentário
n		N° de prestações
PV	3.005,00	Principal
CHS PMT	- 295,00	Prestação
i		5,28% a.m.

6.2 SAC – Sistema de Amortizações Constantes

O SAC é um sistema de amortização em que as parcelas referentes à amortização são sempre constantes e ocorrem em intervalos regulares de tempo. Como as amortizações possuem valor constante, a cada prestação os juros decrescem (já que o saldo devedor se reduz a cada amortização) enquanto que o valor total da prestação cresce. A tabela abaixo, representando a amortização, pelo sistema "SAC", de uma obrigação de R$ 10.000 em 5 parcelas, a juros de 26,44% a.a., ilustra o problema:

Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo
0				10.000,00
1	2.000,00	197,42	2.197,42	8.000,00
2	2.000,00	157,94	2.157,94	6.000,00
3	2.000,00	118,45	2.118,45	4.000,00
4	2.000,00	78,97	2.078,97	2.000,00
5	2.000,00	39,48	2.039,48	0,00

Observa-se que, na medida em que a dívida vai sendo amortizada (e que, portanto, o "saldo devedor" vai sendo reduzido) os juros vão decrescendo e, como o valor da amortização é constante, o valor da prestação diminui.

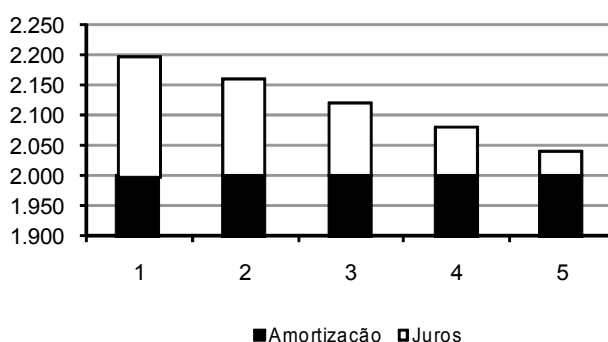



Figura 9 - Sistema de Amortizações Constantes

Evidentemente, os fluxos de caixa decorrentes de uma mesma dívida sendo amortizada a uma mesma taxa de juros e com um mesmo número de prestações, diferindo um do outro apenas pelo fato de um ser amortizado no sistema "price" e o outro no sistema "SAC", são equivalentes para esta mesma taxa de juros.

Exemplo 1:

Calcular o valor das prestações de uma compra de R$ 15.000, sabendo-se que o contrato prevê a amortização em três parcelas iguais, mensais e sucessivas de R$ 5.000, acrescidos de juros de 2% a.m.

Solução:

$PMT_1 = 5.000 + P_1 \times [(1+0,02) - 1] = 5.000 + 15.000 \times 0,02 = R\$ 5.300$

$PMT_2 = 5.000 + P_2 \times [(1+0,02) - 1] = 5.000 + 10.000 \times 0,02 = R\$ 5.200$

$PMT_3 = 5.000 + P_3 \times [(1 + 0,02) - 1] = 5.000 + 5.000 \times 0,02 = R\$ 5.100$

Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo
0				15.000
1	5.000	300	5.300	10.000
2	5.000	200	5.200	5.000
3	5.000	100	5.100	

Exemplo 2:

Qual a taxa de juro anual de um financiamento de R$ 15.000, amortizado pelo sistema SAC, em três parcelas mensais e sucessivas no valor de R$ 5.331,57, R$ 5.221,04 e R$ 5.110,52 respectivamente?

Solução:

Digitando	Visor	Comentário
g CF0	15.000,00	Fluxo inicial
CHS g CFj	- 5.331,57	1ª prestação
CHS g CFj	- 5.221,04	2ª prestação
CHS g CFj	- 5.110,52	3ª prestação
f PV	2,21	Taxa mensal
÷ + Yˣ		
- x		Taxa equivalente anual

6.3 Casos Particulares

6.3.1 Amortização com Carência

Independente de o sistema de amortização ser do tipo "Price ou "SAC" , algumas vezes é previsto um período de carência antes que as prestações passem a ser devidas, conforme mostra o esquema abaixo:

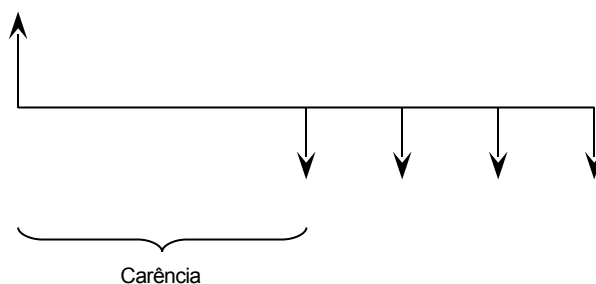
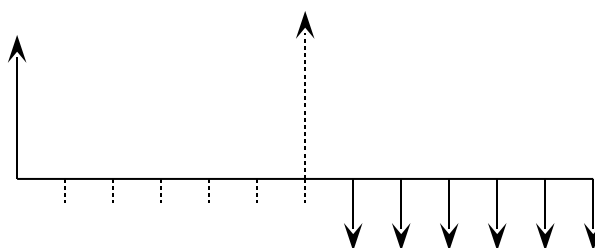



Figura 10 - Amortização com Carência

Nestes casos, para calcularmos os elementos deste fluxo de caixa (valor das prestações, taxa de retorno, etc), trazemos o fluxo inicial até a data final do período de carência pela taxa de desconto, e a partir daí, tratamos o problema como um fluxo a intervalos regulares.

Exemplo:

Qual deveria ser o valor das prestações de um financiamento de R$ 12.000, amortizado pelo sistema francês, que preveja uma carência de 6 meses após a qual vencer-se-ão 6 prestações iguais mensais e sucessivas, calculadas a uma taxa de 2% a.m.?

Solução:

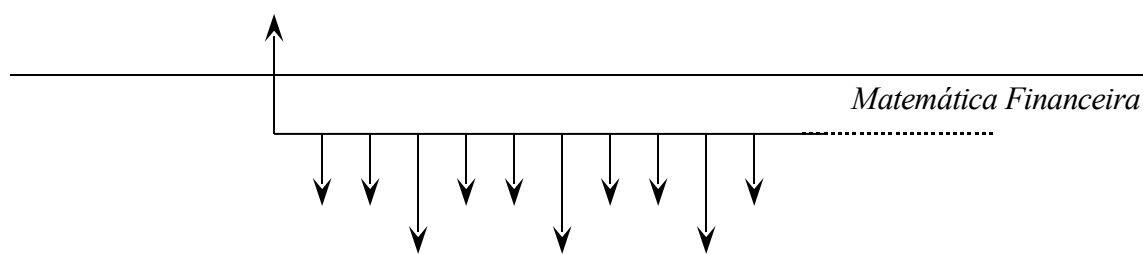
A solução consiste em transportar o fluxo inicial de R$ 12.000 até o período 6, a uma taxa de 2% a.m. Isto pode ser feito pela fórmula:

$$M = P \times (1 + I)^{n} = 12..000 \times 1{,}02^{6} = 13.513{,}95$$

A partir deste ponto, tratamos o problema como um fluxo de caixa a intervalos regulares, conforme o abaixo:

Digitando	Visor	Comentário
n		N° de prestações
i		Taxa de juro
13.513,95 PV	13.513,95	Principal
PMT	- 2.412,59	Valor da prestação

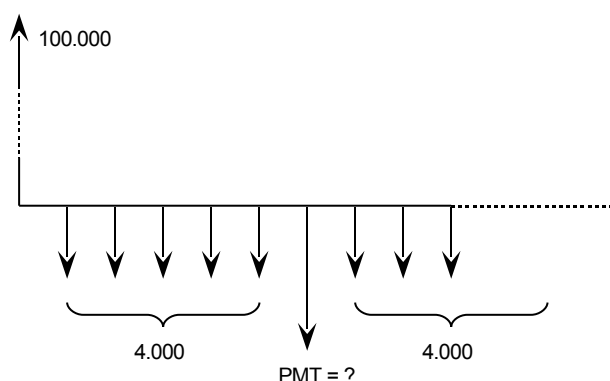
6.3.2 Amortização com Prestações Intermediárias

Algumas vezes, (como acontece no caso de compra de imóveis, por exemplo) o plano de amortização prevê, além das prestações regulares, prestações intermediárias.

Na verdade, tudo se passa como se fossem dois fluxos de caixa fundidos em um só; e na verdade, muitas vezes são, como no caso da compra de imóveis, onde as prestações regulares representam o fluxo de pagamentos da construção e as parcelas intermediárias, o fluxo de pagamentos da chamada "cota de terreno".

Quando não se conhece o principal dos dois fluxos, para que se possa definir o valor das parcelas normais, é preciso que se conheça antes o valor das parcelas intermediárias, e vice-versa.

Exemplo:

Uma imobiliária deseja vender um terreno por R$ 100.000 financiado em 24 prestações mensais, iguais e sucessivas mais 4 parcelas semestrais, iguais e sucessivas .Qual deve ser o valor das prestações intermediárias caso a imobiliária haja decidido que o valor das prestações normais não possa exceder a R$ 4.000, considerando uma taxa de juros de 2% a.m.?

Solução:

1 – Cálculo do valor presente das parcelas normais

Digitando	Visor	Comentário
n		N° de prestações
i		Taxa de juro
CHS PMT	4.000,00	Prestações
PV	75.665,70	Valor Presente

2 – Cálculo do valor das parcelas intermediárias

As parcelas intermediárias deverão amortizar o saldo de R$ 100.000 – R$ 75.665,70 = R$ 24.344,30. A taxa de juros equivalente no semestre a 2% a.m. é:

$$I_{semestre} = [(1 + i_{mensal})^6 - 1] \times 100 = (1{,}02^6 - 1) \times 100 = 12{,}62\%$$

Então, temos que:

Digitando	Visor	Comentário
[n]		N° de prestações
[i]		Taxa de juro
24.344,30 [CHS] [PV]	- 24.344,30	Principal
[PMT]	8.119,24	Valor da prestação

Na verdade, a parcela a ser paga semestralmente será a soma da prestação normal mais a parcela intermediária, ou seja, R$ 12.119,24.

Exercícios

1. Um empréstimo de R$ 100.000 foi amortizado em 4 prestações mensais, iguais e sucessivas de R$ 26.581,40 cada. Qual o valor da amortização do principal e dos juros pagos em cada uma das quatro prestações?
2. No exemplo acima, qual seria o valor de cada prestação caso o empréstimo fosse pelo sistema de amortização constante?
3. Um cliente quer comprar um apartamento que custa, a vista, R$ 150.000,00. A imobiliária está disposta a financiar o apartamento em 5 anos, a juros de 1,5% ao mês. Caso o cliente se disponha a pagar 60 prestações de R$ 2.000,00, qual deveria ser o valor das prestações intermediárias a serem pagas semestralmente?
4. Uma loja de eletrodomésticos está fazendo uma promoção de Natal pela qual quem comprar uma geladeira até o dia 31/12 só começa a pagar em maio. Um cliente quer comprar uma geladeira que custa R$ 1.000,00 para pagar em oito prestações iguais, mensais e sucessivas, vencendo-se a primeira em maio. Qual deveria ser o valor das prestações caso a loja cobre uma taxa de juros de 2,5% a.m.?

7. Solução dos Exercícios

Capítulo 2

1) O principal é a quantia aplicada ou captada e sobre a qual incidirão juros. O montante é igual ao principal mais os juros.
2) Juro é a remuneração, recebida ou paga, por quem aplicou ou captou recursos; é portanto, sempre expresso em unidades monetárias. Taxa de Juros é a relação entre os juros, pagos ou recebidos, e o principal, em um determinado período. A taxa de juros pode ser expressa em notação decimal ou percentual.
3) Taxa efetiva é aquela expressa em uma unidade de tempo igual à do período de capitalização. Exemplo: 2% ao mês, capitalizados mensalmente. Já a taxa efetiva é aquela expressa em uma unidade de tempo diferente à do período de capitalização. Exemplo: 20% ao ano, capitalizados mensalmente.
4) No regime de juros simples, os juros incidem somente sobre o capital. Já no regime de juros compostos, ao final de cada período de capitalização, os juros produzidos incorporam-se ao principal e passam a render juros também.
5) Período de capitalização é o período decorrido o qual os juros passam a ser devidos ou incorporam-se ao principal. Prazo da operação é o período decorrido o qual o principal e os juros tornam-se integralmente devidos.
6) Duas taxas são proporcionais quando, aplicadas sobre um mesmo principal por um mesmo período de tempo, no regime de juros simples, produzem o mesmo montante. Duas taxas são equivalentes quando, aplicadas sobre um mesmo principal por um mesmo período de tempo, no regime de juros compostos, produzem o mesmo montante. Portanto, o que difere o conceito de taxas proporcionais do conceito de taxas equivalentes é o regime de capitalização.

Capítulo 3

1) M = ?

   P = R$ 10.000

   i = 0,02 ao mês, ou 2% ao mês

   n = 12 meses

$$M = P \times [1 + (i \times n)] = 10.000 \times [1 + (0.02 \times 12)] = R\$\ 12.400$$

2) M = R$ 10.000

   P = ?

   i = 0,04 ou 4% ao trimestre

   n = 24 meses

   Calculo da taxa proporcional

$$i_p = \frac{0{,}04 \times 24}{3} = 0{,}32 \text{ ou } 32\% \text{ em } 24 \text{ meses}$$

   Cálculo do principal

$$P = \frac{M}{[1 + (i \times n)]} = \frac{10.000}{[1 + (0{,}32 \times 1)]} = R\$\ 7.575{,}76$$

   Uma solução mais simples e mais elegante consiste em utiliza a fórmula do "principal" fazendo "i" igual à taxa efetiva e "n" igual ao número de trimestres contidos no período de 24 meses (24 ÷3 = 8, donde n=8). Assim teríamos que:

$$P = \frac{M}{[1 + (i \times n)]} = \frac{10.000}{[1 + (0{,}04 \times 8)]} = R\$\ 7.575{,}76$$

3) M = 2P

   P = P

   i = 0,02 ou 2% a.m.

   n = ?

$$n = \frac{M - P}{P \times i} = \frac{2P - P}{P \times 0{,}02} = \frac{1}{0{,}02} = 50 \text{ meses}$$

   Uma solução mais simples e mais elegante consiste em utilizar a fórmula da taxa proporcional. Neste caso, a taxa proporcional a 2% a.m. que dobra o principal é 100%. Dividindo as duas taxas proporcionais, encontramos o período. Assim temos que 100% ÷2% = 50 meses.

4) P = 2.500

   i = 0,03 ou 3% a.m..

   n = 18 dias

   J = ?

$$J = P \times i \times n = \frac{P \times i \times 18}{30} = \frac{2.500 \times 0,03 \times 18}{30} = R\$ 45$$

5) M = ?

   P = R$ 100.000

   i = 0,12 ou 12% a.a.

   n = 6 meses

$$M = P \times [1 + (i \times n)] = 100.000 \times [1 + (0,12 \times 0,5)] = R\$ 106.000$$

6) Quem descontasse um título com vencimento em 30 dias a uma taxa de desconto de 4% a.m. receberia 96% do valor de face deste título. Assim, temos que:

   M = 1,00

   P = 0,96

   i = 0,04 ou 4% a.m.

   n = 1 mês

$$i = \frac{M - P}{P \times n} = \frac{1,00 - 0,96}{0,96 \times 1} = 0,0417 \text{ ou } 4,17\% \text{ a.m.}$$

   Uma solução mais simples e mais elegante, no caso de o período de capitalização ser igual ao prazo da operação, consiste em utilizar a fórmula:

$$i = \frac{M}{P} - 1 = \frac{1,00}{0,96} - 1 = 0,0417 \text{ ou } 4,17\% \text{ a.m.}$$

7)

$$i = \frac{M}{P - (30 \times 0{,}0041\%)} - 1 = \frac{1{,}00}{0{,}96 - 0{,}00123} - 1 = 0{,}0430 \text{ ou } 4{,}30\% \text{ a.m.}$$ [3]

Capítulo 4

1)

Digitando		Visor	Comentário
	CHS g CF_0	- 2.000	Fluxo inicial
0	g CFj	0	
2	g Nj	2,00	N° de fluxos iguais e consecutivos
	g CFj	3.000,00	
1	g Nj	1,00	
0	g CFj		
4	g Nj	4,00	
	CHS g CFj	- 5.000	
	f IRR	- 0,04438	

2) Primeiro, vamos calcular o valor presente das prestações para, depois, subtraí-lo do fluxo inicial.

Assim, temos que:

[3] A taxa efetiva é maior do que a taxa de desconto porque, no caso de desconto, os juros são cobrados "na cabeça".

Digitando			Visor	Comentário
5	n		5,00	
5	i		5,00	
	CHS	PMT	- 2.310,00	
	PV		10.001,10	

O valor presente deste fluxo de caixa é praticamente zero.

3)

Digitando			Visor	Comentário
6	n		6,00	
105	CHS	PMT	105,00	
500	PV		500,00	
	i		7,03	

Resposta: 7,03%

4)

Digitando				Visor	Comentário
	CHS	g	CF_0		Fluxo inicial
4.000	g	CFj		4.000,00	
4	g	Nj			N° de fluxos iguais e consecutivos
	g	CFj			

- 50.000

4,00

5.000,00

4	g	Nj	4,00	
6.000	g	CFj	6.000	
4	g	Nj	4,00	
	f	IRR	2,686	2,686 % ao mês

5) Valor da primeira prestação:

n.° de dias entre 20/01/00 e 21/02/00 = 32

$J = 100.000 \times [(1 + 0,24)^{(32/360)} - 1] = R\$ 1.930,50$

$PMT_1 = R\$ 50.000,00 + R\$ 1.930,50 = R\$ 51.930,50$

Valor da segunda prestação

n.° de dias entre 21/02/00 e 20/03/00 = 28

$J = 50.000 \times [(1 + 0,24)^{(28/360)} - 1] = R\$ 843,58$

$PMT_2 = R\$ 50.000,00 + R\$ 843,58 = R\$ 50.843,58$

Abaixo, mostramos a planilha desta operação:

Data	Juros	Principal	Prestação	Saldo
20/01/00				100.000,00
21/02/00	1.930,50	50.000,00	51.930,50	50.000,00
20/03/00	843,58	50.000,00	50.843,58	

6) Valor da primeira prestação:

n.° de dias entre 20/01/00 e 21/02/00 = 32

$PMT_1 = 100.000 \times [(1 + 0,24)^{(32/360)} - 1] = R\$ 1.930,50$

Valor da segunda prestação

n.° de dias entre 21/02/00 e 20/03/00 = 28

$J = 100.000 \times [(1 + 0,24)^{(28/360)} - 1] = R\$ 1.687,16$

$PMT_2 = R\$ 100.000,00 + R\$ 1.687,16 = R\$ 101.687,16$

Abaixo, mostramos a planilha desta operação:

Data	Juros	Principal	Prestação	Saldo
20/01/00				100.000,00
21/02/00	1.930,50		1.930,50	100.000,00
20/03/00	1.687,16	100.000,0	101.687,16	

7)

Digitando	Comentário	Visor	
	CHS g CF_0		Fluxo inicial
9.455,96	g CFj	9.455,96	Prestação
12	g Nj	12,00	N° de fluxos iguais e consecutivos
	f IRR	2,50	2,50 5 a.m.

Vê-se portanto que a taxa efetiva de juros não é 2% ao mês, como afirma o banco, mas sim 2,5% ao mês.

8)

Digitando	Comentário	Visor	
	CHS g CF_0	100.000,00	Fluxo inicial

9.748,71	g CFj	9.748,71	Prestação
12	g Nj	12,00	N° de fluxos iguais e consecutivos
	f IRR	2,50	2,50 a.m.

Observa-se portanto que, do ponto de vista de taxa de juros, os dois planos de amortização se equivalem.

Capítulo 5

1) Vamos calcular, inicialmente, a taxa de juros desta operação. Por se tratar de uma série uniforme, podemos utilizar as seguintes teclas da calculadora

Digitando		Visor	Comentário
	PV	100.000,00	Fluxo inicial
26.581,40	CHS PMT	26.581,40	Prestação
4	n	4,00	N° de fluxos iguais e consecutivos
	i	2,50	2,50 a.m.

Agora, temos que:

1ª prestação)

Juros = 100.000 x [(1 + 0,025) – 1] = 2.500,00

Amortização = 26.581,40 – 2.500,00 = 24.081,40

2ª prestação)

Juros = (100.000 – 24.081,40) x [(1 + 0,025) – 1] = 1.897,97

Amortização = 26.581,40 – 1.897,97 = 24.683,44

3ª prestação)

Juros = (100.000 – 24.081,40 – 24.683,44) x [(1 + 0,025) – 1] = 1.280,88

Amortização = 26.581,40 – 1.280,88 = 25.300,52

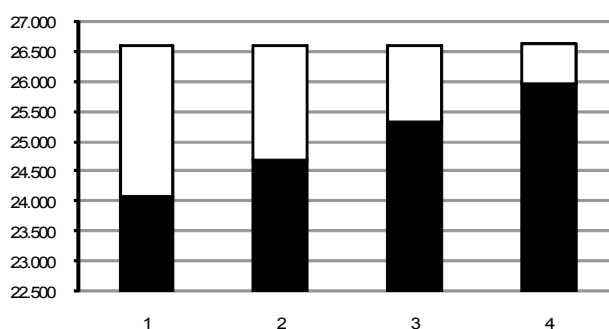
4ª prestação)

Juros = (100.000 – 24.081,40 – 24.683,44 – 25.300,52) x [(1 + 0,025) – 1] = 648,37

Amortização = 26.581,40 – 648,37 = 25.933,03

A planilha e o gráfico abaixo ilustram o plano de amortização;

Nº	Juros	Amortização	Prestação	Saldo
				100.000,00
1	2.500,00	24.081,40	26.581,40	75.918,60
2	1.897,97	24.683,44	26.581,40	51.235,16
3	1.280,88	25.300,52	26.581,40	25.933,03
4	684,37	25.933,03	26.581,40	
Total	***6.363,22***	***100.000,00***	***106.363,22***	

Nota: Pequenas diferenças observadas na tabela acima são devidas a arredondamentos na terceira casa decimal à direita da vírgula.

2)

1ª prestação)

Juros = 100.000 x [(1 + 0,025) – 1] = 2.500,00

Amortização = 25.000,00 + 2.500,00 = 27.500,00

2ª prestação)

Juros = (100.000 – 25.000) x [(1 + 0,025) – 1] =1.875,00

Amortização = 25.000 + 1.875,00 = 26.875,00

3ª prestação)

Juros = (100.000 – 50.000) x [(1 + 0,025) – 1] =1.250,00

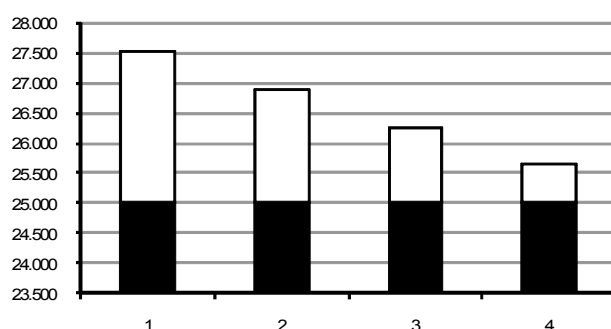
Amortização = 25.000 + 1.250,00 = 26.250,00

4ª prestação)

Juros = (100.000 – 75.000) x [(1 + 0,025) – 1] = 625,00

Amortização = 25.000 + 625,00 = 25.625,00

A planilha e o gráfico abaixo ilustram o plano de amortização:

Nº	Juros	Amortização	Prestação	Saldo
				100.000,00
1	2.500,00	25.000,00	27.500,00	75.000,00
2	1.875,00	25.000,00	26.875,00	50.000,00
3	1.250,00	25.000,00	26.250,00	25.000,00
4	625,00	25.000,00	25.625,00	
Total	***6.250,00***	***100.000,00***	***106.250,00***	

3)

Cálculo do valor presente das 60 prestações de R$ 2.000,00:

Digitando	*Visor*	*Comentário*
[n]	60,00	Nº de períodos
[i]	1,5	Taxa de juros
2.000 [CHS] [PMT]	- 2.000,00	Prestação
[PV]	78.760,54	Valor Presente

O saldo devedor a ser coberto pelas prestações intermediárias é, portanto, R$ 100.000,00 menos R$ 78.760,54, ou seja, R$ 21.239,46.

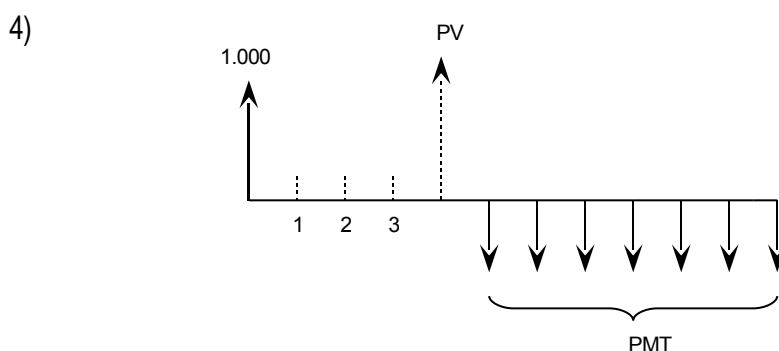
Cálculo da taxa equivalente

$I_e = [(1 + 0,015)^6 - 1] \times 100 = 9,34\%$ ao semestre

Assim temos que:

Digitando	*Visor*	*Comentário*
n	10,00	Nº de períodos
i	9,34	Taxa de juros
21.239,46 PV	21.239,46	Saldo devedor
PMT	- 3.359,23	Prestação

O valor das prestações intermediárias semestrais será, portanto, R$ 3.359,23 + R$ 2.000,00 = R$ 5.359,23.

4)

Para calcular o valor das prestações, calculamos o valor corrigido do principal no mês de abril.

$PV = 1.000,00 \times (1 + 0,025)^4 = R\$\ 1.103,81$

Para calcular o valor das prestações, procedemos conforme abaixo:

Digitando	*Visor*	*Comentário*
n	8,00	Nº de períodos
i	2,50	Taxa de juros
1.103,81 PV	1.103,81	Saldo devedor
PMT	153,81	Prestação